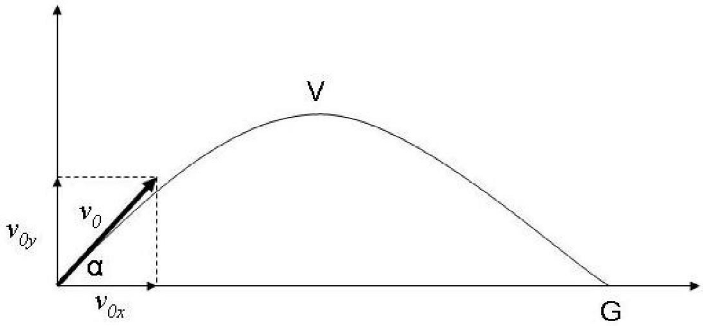
Parabola di sicurezza

Un proiettile viene sparato dall'origine *O(0;0)* di un sistema di assi cartesiani con velocità iniziale $\overrightarrow{v_0} = (v_{0x}; v_{0y})$ e alzo α.



Le **equazioni parametriche del moto** sono

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$ da cui, eliminando *t*,

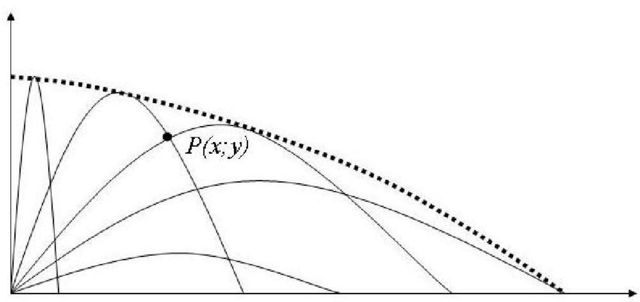
ricaviamo l'**equazione cartesiana della traiettoria:** $y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$.

Si tratta di una parabola rivolta verso il basso, con vertice $V = \left(\frac{v_{0x}v_{0y}}{g}; \frac{v_{0y}^2}{2g}\right)$, che interseca l'asse delle ascisse in *0* e in $G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$. Quest'ultimo valore è chiamato "gittata". Se l'alzo fosse di 90° la quota *h* raggiunta dal proiettile sarebbe $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

Detta *m* l'inclinazione dello sparo, è $m = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ da cui ricaviamo $v_{0y} = mv_{0x}$ e $v_0 = \left|\overrightarrow{v_0}\right| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + m^2v_{0x}^2} = v_{0x}\sqrt{1+m^2}$

Utilizzando *m* come incognita, l'equazione cartesiana della traiettoria può allora essere scritta come

$$y = mx - \frac{g}{2}\cdot\frac{1+m^2}{v_0^2}x^2$$



Al variare di *m* si ottiene la traiettoria descritta dal proiettile. Un punto $P = (\bar{x}; \bar{y})$ potrà essere raggiunto dal proiettile se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione della traiettoria per qualche *m*. Sostituendo le coordinate di $P = (\bar{x}; \bar{y})$ nell'equazione della traiettoria si ottiene l'equazione $\bar{y} = m\bar{x} - \frac{g}{2}\frac{1+m^2}{v_0^2}\bar{x}^2$ che è una equazione di secondo grado nella variabile *m*.

In forma canonica essa diventa : $\frac{g}{2}\frac{\bar{x}^2}{v_0^2}m^2 - \bar{x}\cdot m + \bar{y} + \frac{g}{2}\frac{1}{v_0^2}\bar{x}^2 = 0$.

Essa ha soluzioni se $\Delta \geq 0$ ossia se $\bar{x}^2 - 4\cdot\frac{g}{2}\frac{\bar{x}^2}{v_0^2}\left(\bar{y} + \frac{g}{2}\frac{1}{v_0^2}\bar{x}^2\right) \geq 0$ ossia se

$\frac{2g\bar{x}^2}{v_0^2}\left(\bar{y} + \frac{g}{2}\frac{1}{v_0^2}\bar{x}^2\right) \leq \bar{x}^2$ ossia se $\bar{y} + \frac{g}{2}\frac{1}{v_0^2}\bar{x}^2 \leq \frac{v_0^2}{2g}$ ossia se $\bar{y} \leq -\frac{g}{2v_0^2}\bar{x}^2 + \frac{v_0^2}{2g}$

Sono raggiungibili tutti i punti $P = (\bar{x};\bar{y})$ che stanno “sotto” la parabola di equazione $y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$ Non sono raggiungibili quelli che stanno “al di sopra” di tale parabola, che pertanto è detta **parabola di sicurezza** (curva tratteggiata nel grafico a pagina precedente).

Se $\Delta > 0$ il punto sta “sotto” la parabola di sicurezza ed esistono due inclinazioni distinte utili per colpirlo. Se $\Delta = 0$ il punto sta su tale parabola è vi è una sola inclinazione possibile per colpirlo.

L’ascissa del punto in cui la parabola di sicurezza interseca il semiasse positivo delle x corrisponde alla **massima gittata**. Tale valore è $G_{MAX} = \frac{v_0^2}{g}$.