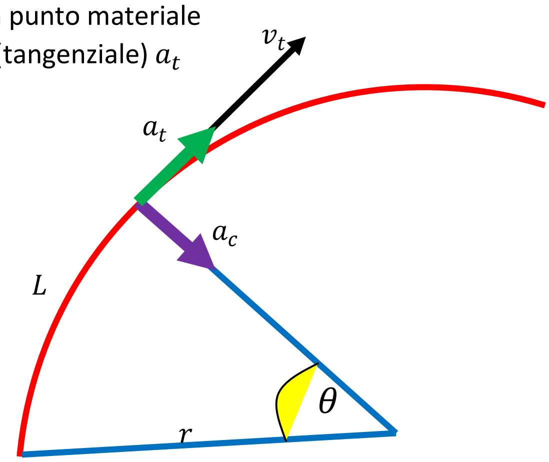
## MOTO CIRCOLARE UNIFORMRMRNTE ACCELERATO

Si definisce moto circolare uniformemente accelerato il moto di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare con accelerazione periferica (tangenziale) $a_t$ costante la cui direzione è tangente alla traiettoria.




Le equazioni del moto circolare uniformemente accelerato sono analoghe a quelle del moto rettilineo uniformemente accelerato. Le equazione del moto di un punto che si muove sulla traiettoria $L$ sono:

$$L = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \qquad\qquad v_t = v_0 + a_t \cdot t$$

Le relazioni matematiche che legano le grandezze tangenziali a quelle angolari sono:

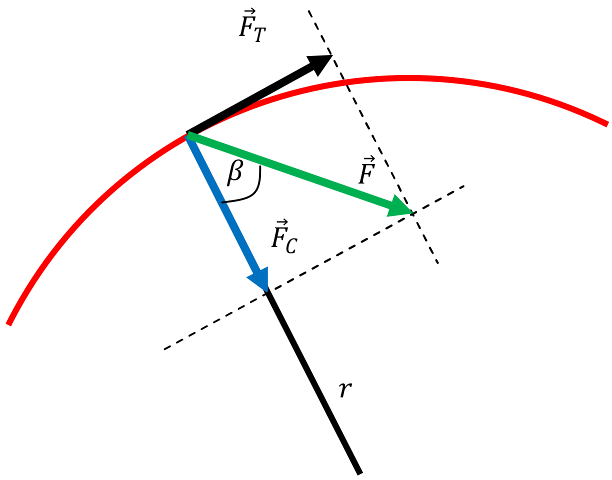
$$\boldsymbol{L = \theta \cdot r} \qquad \boldsymbol{v_t = \omega \cdot r} \qquad a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r\Delta\omega}{\Delta t} = r\alpha \rightarrow \boldsymbol{a_t = \alpha \cdot r} \qquad (\alpha\ \ accelerazione\ angolare)$$

Sostituendo queste relazioni nelle equazioni del moto uniformemente accelerato si ottiene:

$$\theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \qquad\qquad \omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

| **Moto rettilineo uniformemente accelerato** | **Moto circolare uniformemente accelerato** |
|---|---|
| $L = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2$ | $\theta = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$ |
| $v_t = v_0 + a_t \cdot t$ | $\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$ |
| $v_f^2 - v_0^2 = 2as$ | $\omega_f^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$ |

## DINAMICA DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORMRMRNTE ACCELERATO



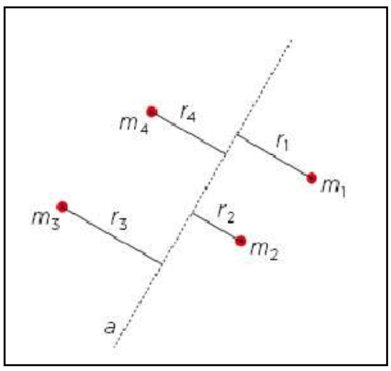

Su un punto materiale che si muove di moto circolare uniformemente accelerato agiscono due forze: una forza tangenziale che determina una accelerazione tangenziale ed una forza centripeta che causa una accelerazione centripeta.

$F_T = m \cdot a_T$ moltiplicando entrambi i membri per il raggio si ha: $F_T \cdot r = m \cdot a_T \cdot r$

$F_T \cdot r$ non è altro che il momento della forza risultante $\vec{F}$ infatti:

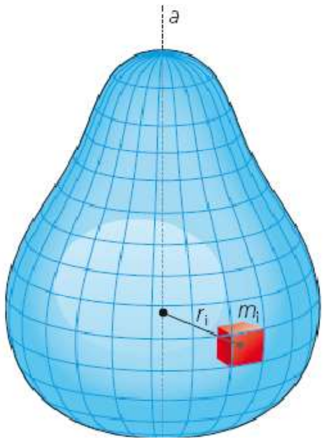
$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r} = F \cdot r \cdot \sin\beta \quad ma \quad F \cdot \sin\beta = F_T \quad \rightarrow \quad M = F_T \cdot r$

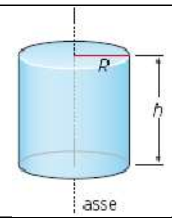
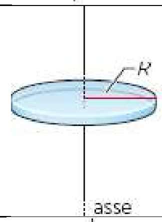
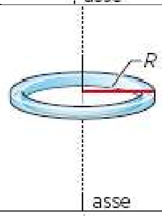
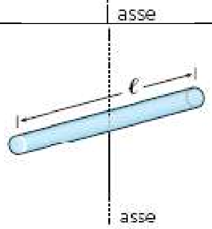
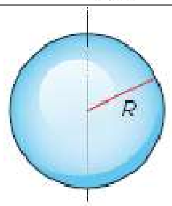
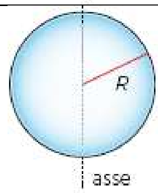
Quindi l'equazione $F_T \cdot r = m \cdot a_T \cdot r$ si può scrivere: $M = m \cdot a_T \cdot r$ e ricordando che vale la relazione $a_t = \alpha \cdot r$ si ha: $M = m \cdot \alpha \cdot r \cdot r = \alpha \cdot m \cdot r^2$. La quantità $m \cdot r^2$ prende il nome di ***momento di inerzia*** e si indica con il simbolo $\boldsymbol{I}$ per cui la relazione può essere riscritta in questo modo: $M = I \cdot \alpha$ Questa relazione è molto importante e indica che il momento della forza rispetto al centro di rotazione è direttamente proporzionale all'accelerazione angolare $\alpha$ del punto materiale soggetto alla forza $\vec{F}$ attraverso la costante $I$. Se si confronta l'equazione della seconda legge della dinamica $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ con l'equazione $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$ si comprende il significato fisico del ***momento di inerzia.*** Esso rappresenta una misura di quanto il corpo si oppone alle variazioni di velocità angolare. Un sistema costituito da più corpi assimilabili a punti materiali di masse $m_i$ ha un momento di inerzia complessivo, rispetto a un asse posto a distanza $r_i$ da ciascun corpo, dato dalla somma dei momenti di inerzia $I_i$ dei singoli corpi: $I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$



## DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO CHE RUOTA INTORNO AD UN ASSE

La relazione $M = I \cdot \alpha$ può essere generalizzata anche a corpi rigidi estesi in rotazione intorno ad un asse. $M$ e $\alpha$ hanno lo stesso significato mentre il momento di inerzia dipende dalla geometria del corpo. Nel caso di un corpo rigido esteso, il momento di inerzia si ricava con lo stesso ragionamento, ma immaginando di suddividere il corpo in infinite porzioni di volume piccolissimo, considerate puntiformi ed estendendo quindi la sommatoria a tutti i loro contributi.




| CORPO RIGIDO | ASSE | MOMENTO DI INERZIA |
|---|---|---|
| Cilindro pieno |   | $I = \frac{1}{2}MR^2$ |
| Disco |   | $I = \frac{1}{2}MR^2$ |
| Anello sottile |   | $I = MR^2$ |
| Sbarra sottile |   | $I = \frac{1}{12}Ml^2$ |
| Sfera piena |   | $I = \frac{2}{5}MR^2$ |
| Sfera cava sottile |   | $I = \frac{2}{3}MR^2$ |

## TEOREMA DI STEINER

Quando un corpo ruota intorno ad un asse che non passa per il suo baricentro. Il momento di inerzia del corpo si ottiene applicando il teorema di Steiner: dato un corpo di massa $m$ e momento di inerzia baricentrico $I_B$, se esso ruota intorno ad un asse parallelo ad un suo asse baricentrico ma distante $d$ da questo, il momento di inerzia $I_D$ , valutato rispetto al nuovo asse di rotazione, è dato da:

$I_D = I_B + md^2$