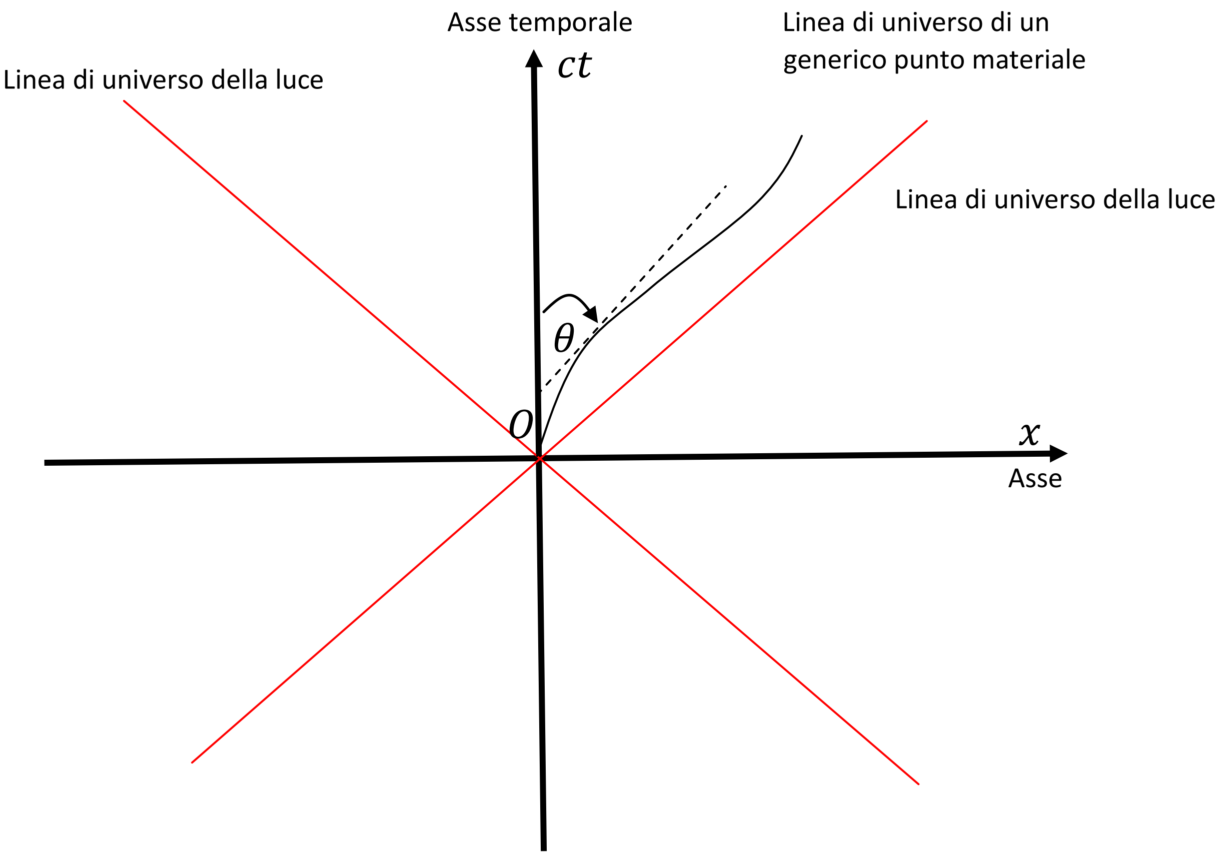
GEOMETRIA DELLO SPAZIO TEMPO (Diagrammi spazio-temporali di minkowski)

CRONOTOPO DI MINKOWSKI



La tangente alla linea di universo in un punto qualunque è data da:

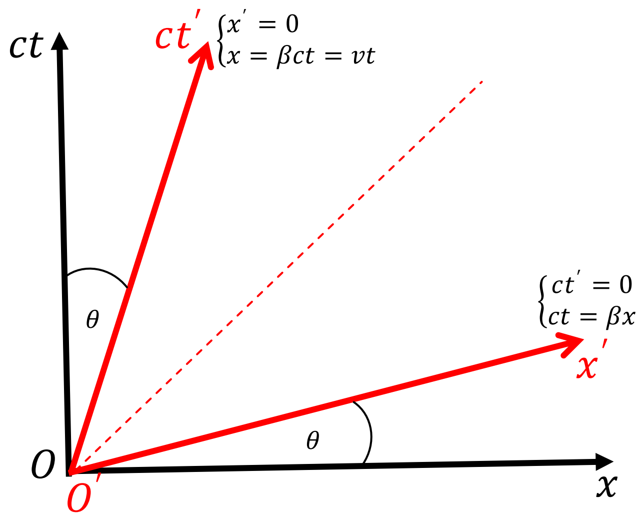
$\tan\theta = \frac{dx}{d(ct)} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c}v = \frac{v}{c}$ e dato che $v < c \; \rightarrow \; \tan\theta < 1 \; \rightarrow \; \theta < 45^{\circ}$

Dato un riferimento $S^{'}$ in moto relativo rispetto a S come si può rappresentare nel diagramma di Minkowski? Nel riferimento S l'asse orizzontale $\boldsymbol{x}$ rappresenta gli eventi per i quali $ct = 0$ e l'asse verticale y rappresenta gli eventi per i quali $x = 0$ per cui i nuovi assi $x^{'}$ e $ct^{'}$ avranno lo stesso significato.

L'asse ($ct^{'}$) del riferimento $O^{'}$ corrisponde agli eventi per i quali $x^{'} = 0$. Dalle trasformazioni di Lorentz si ha:
$X^{'} = \gamma(X - \beta ct) \; \rightarrow \; X^{'} = 0 \; \rightarrow \; \gamma(X - \beta ct) = 0 \; \rightarrow$
$X = \beta ct$ Quindi $\boldsymbol{\tan\theta = \beta}$

L'asse ($x^{'}$) del riferimento $O^{'}$ corrisponde agli eventi per i quali $ct^{'} = 0$. Dalle trasformazioni di Lorentz si ha:
$ct^{'} = \gamma(ct - \beta X) \rightarrow \; ct^{'} = 0 \; \rightarrow \; \gamma(ct - \beta X) = 0$
$ct = \beta x \rightarrow \tan\theta = \beta$
Quindi $\boldsymbol{\tan\theta = \beta}$

Le equazioni di Lorentz trasformano un sistema di riferimento ortogonale (O) in un sistema di riferimento non ortogonale $O^{'}$ in cui l'angolo θ è dato da: $\theta = \tan^{-1}\beta$. Il valore massimo che θ può assumere è pari a $\theta = \frac{\pi}{4}$ e lo si ha in corrispondenza ad una velocità pari a c.



Per determinare l'unità degli assi si procede in questo modo:

La distanza tra due eventi è data da: $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 - \mathrm{x}^2$ (***invariante relativistico***) per cui se vogliamo determinare l'unità si pone $\mathrm{ds}^2 = 1 \rightarrow \mathrm{c}^2\mathrm{t}^2 - \mathrm{x}^2 = 1$. Questa equazione rappresenta una iperbole equilatera con asse di simmetria sull'asse y per cui se si determina il punto di intersezione con l'asse ct' si ottiene l'unita per quest'asse. Si procede allo stesso modo per l'asse x'.

Il punto P_1 si ottiene intersecando il ramo destro dell'iperbole di calibrazione $x^2 - (ct)^2 = 1$ con l'asse x' rappresentato dall'equazione $ct = \beta x$

$$\begin{cases} x^2 - (ct)^2 = 1 \\ ct = \beta x \end{cases} \rightarrow \quad x^2 - (\beta x)^2 = 1$$

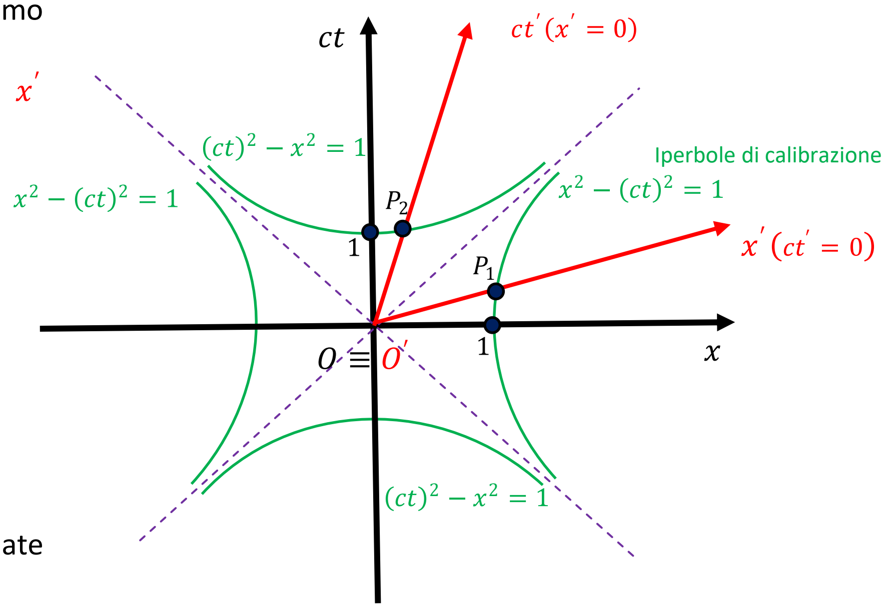
$$\begin{cases} x^2(1-\beta^2) = 1 \rightarrow \quad x^2 = \dfrac{1}{(1-\beta^2)} \\ ct = \beta x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma \\ ct = \beta x \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} x = \gamma \\ ct = \beta\gamma \end{cases}$$

$P_1 \equiv (\gamma; \beta\gamma)$

Allo stesso modo si ricavano le coordinate del punto P_2

$P_2 \equiv (\beta\gamma; \gamma)$



La figura a lato mostra come localizzare un evento in un sistema di riferimento.

Si può notare che gli eventi P_1 e P_2 simultanei nel sistema di riferimento O non sono simultanei nel riferimento O'

Possiamo usare la rappresentazione geometrica spazio-tempo anche per comprendere l'ordine temporale e la separazione spaziale degli eventi.