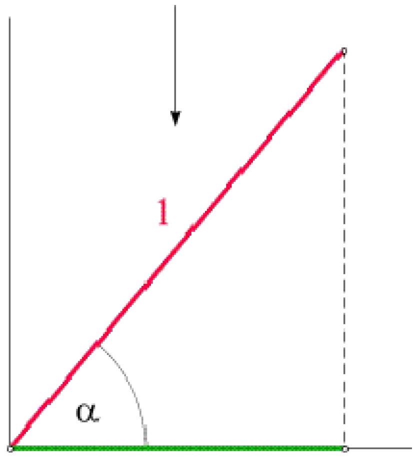
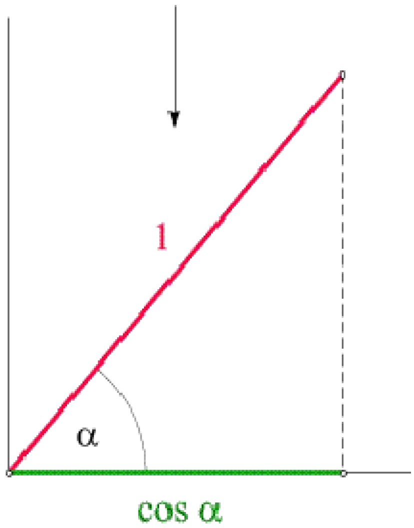
Elementi di trigonometria

SENO E COSENO

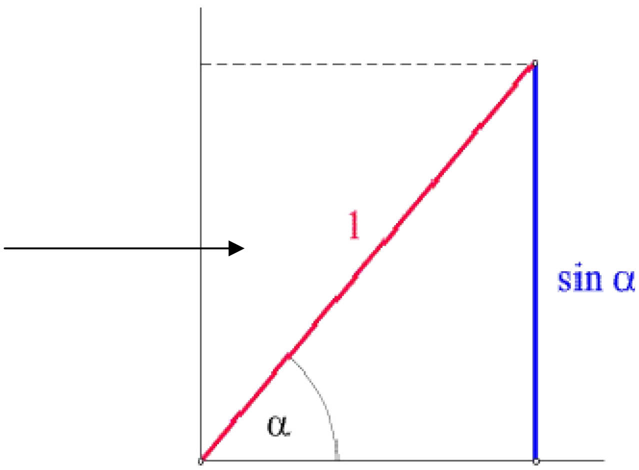
Iniziamo con una semplice domanda: Dato un bastone di lunghezza 1 inclinato di un angolo α rispetto al piano orizzontale, quanto è lunga la sua ombra quando il sole lo illumina verticalmente? Si consideri il disegno a lato: Il segmento rosso rappresenta il bastone, la freccia rappresenta la luce che cade dall'alto. L'angolo α può essere scelto arbitrariamente (nell'esempio a lato abbiamo $\alpha = 51°$). Si cerca la lunghezza del segmento verde. Il problema *non è solubile con le operazioni di calcolo che viste fino ad ora!* Solo in casi eccezionali la lunghezza dell'ombra può essere espressa con numeri già noti (ad esempio per $\alpha = 60°$ la lunghezza è $^1/_2$, per $\alpha = 45°$ è $2^{-1/2}$), mentre se prendiamo $\alpha = 51°$ otteniamo un numero (reale) che non si esprime in questo modo né in modo simile. Pur non sapendo come *calcolare* la lunghezza dell'ombra per $\alpha = 51°$ (a titolo di esempio), è chiaro che questa è *univocamente determinata* dalla domanda posta sopra. Per ottenere una prima approssimazione, possiamo fare un disegno (possibilmente) preciso sullo stile di quello riportato più sopra e *misurare* la lunghezza del segmento verde. Troveremo un valore di circa 0,63. Un procedimento di questo tipo è però insoddisfacente dal punto di vista matematico. Quello che in ogni caso possiamo fare intanto è dare un nome al risultato *esatto*: lo chiamiamo **coseno**.





La lunghezza del segmento verde si esprime con **cos** α oppure **cos(**α**)** e si legge "Cosen alfa" oppure "Coseno di alfa". Poiché l'ombra è la lunghezza dell'immagine che il sole "proietta" sulla terra, possiamo anche dire: cos α è la **lunghezza della proiezione** di un segmento che – come nel disegno qui sopra – è inclinato di angolo α e ha lunghezza 1. Se $\alpha = 51°$, come nel nostro esempio, scriveremo cos(51°). Il simbolo cos(51°) rappresenta quindi un *numero* reale (circa uguale a 0.63), cos(60°) rappresenta un altro numero reale (e cioè $^1/_2$), ecc.

Analogamente possiamo illuminare il bastone con un raggio di luce in direzione orizzontale e chiederci quanto sarà lunga la sua ombra proiettata su una parete verticale. Anche questa lunghezza in generale non può essere espressa con uno dei metodi di calcolo a noi già noti. La chiameremo **Seno.**

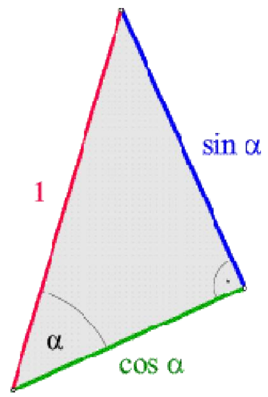


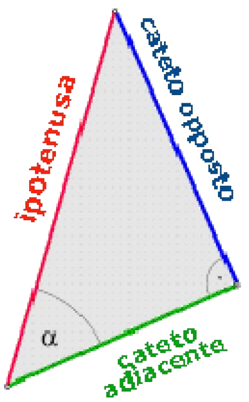
La lunghezza del segmento blu nel disegno qui a fianco a destra si esprime con **sin** α oppure **sin(**α**)** e si legge "Sen alfa" oppure "Seno di alfa". Anche questa volta si tratta di una **proiezione**, adesso però ad opera di un raggio di luce orizzontale. Se ad esempio abbiamo $\alpha = 51°$, scriviamo sin(51°).

Seno e Coseno (e altre grandezze che ricaveremo più sotto) si chiamano **funzioni trigonometriche**. Il nome "funzione" deriva dal fatto, che *a ciascun angolo* α *possiamo assegnare* i due numeri sin α e cos α. Da un punto di vista matematico non c'è niente di eccezionale. Quando *assegniamo* a un numero x il suo quadrato scrivendo $f(x) = x^2$ non facciamo niente di diverso. La differenza rispetto a formare il quadrato consiste soltanto nel fatto che il calcolo numerico di sin α e cos α per un angolo dato α è più complicato. Per fortuna possiamo delegare questo compito a strumenti come il computer o la calcolatrice. Anche questi strumenti per la maggioranza degli angoli ci forniscono solo dei valori approssimati che però, come nel caso dell'estrazione di radice, sono sufficientemente precisi per quanto riguarda le applicazioni pratiche.

Seno e Coseno in un triangolo rettangolo

<u>In un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza 1</u>, sia α uno dei due angoli acuti. Allora abbiamo che sin α è la lunghezza del cateto **opposto** all'angolo α, e cos α è la lunghezza del cateto **adiacente** all'angolo α.





In generale In un triangolo rettangolo possiamo definire le funzioni goniometriche per **uno dei due angoli acuti** nel seguente modo:

$$Sin(\alpha) = \frac{Cateto \quad opposto\, all'angolo \quad \alpha}{ipotenusa}$$

$$Cos(\alpha) = \frac{Cateto \quad adiacente\, all'angolo \quad \alpha}{ipotenusa}$$

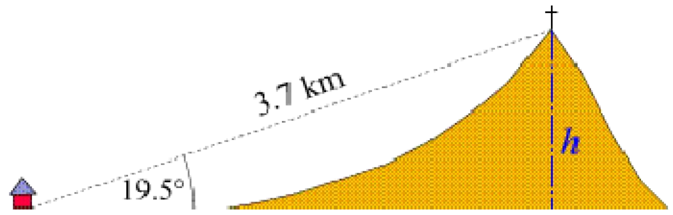
Vediamo di illustrare come si utilizzano queste proprietà nei calcoli.

Consideriamo il seguente **problema :**

Come raffigurato nella figura sotto, la distanza diretta fra un punto di osservazione e la vetta di un monte misura 3.7 km. La vetta appare dal punto di osservazione sotto un angolo di 19.5°. Quanto è alta la montagna?
Considerando il triangolo rettangolo nel disegno, possiamo usare la funzione seno.

$$\sin(19{,}5^\circ) = \frac{h}{3{,}7km}$$

Quindi $h = \sin(19{,}5°) \cdot 3{,}7km$



Utilizzando la calcolatrice otteniamo
sin(19.5°) = 0.3338, e quindi
h = 0.3338 × 3.7 km = 1.24 km, arrotondando il risultato.

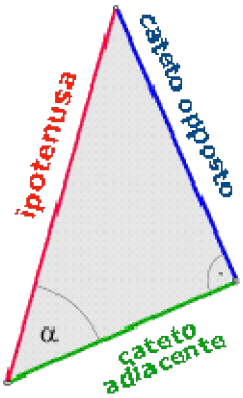
Tangente e Cotangente in un triangolo rettangolo

Anche Tangente e Cotangente possono essere interpretate come rapporti fra i lati in un triangolo rettangolo.

$$Tan(\alpha) = \frac{Cateto \quad opposto\, all'\, angolo \quad \alpha}{Cateto \quad adiacente\, all'\, angolo \quad \alpha}$$

$$Cot(\alpha) = \frac{Cateto \quad adiacente\, all'\, angolo \quad \alpha}{Cateto \quad opposto\, all'\, angolo \quad \alpha}$$

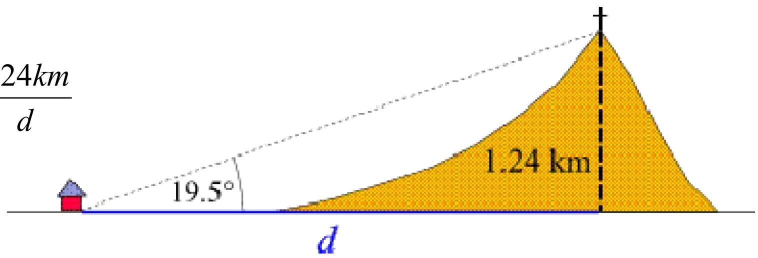
Come esempio applicativo consideriamo il seguente **problema**:



La vetta di un monte alto 1.24 km viene osservata sotto un angolo di 19.5°. A che distanza si trova l'osservatore dalla proiezione sul piano della vetta del monte?

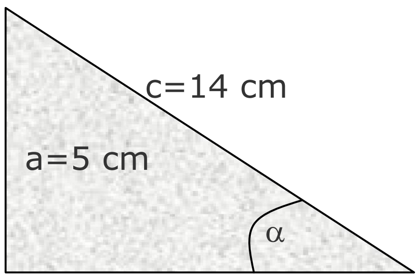
Considerando il triangolo rettangolo nel disegno, possiamo usare la funzione tangente.

$$\tan(19{,}5°) = \frac{1{,}24km}{d}$$



Quindi $d = \frac{1{,}25km}{\tan(19{,}5°)}$ Usando la calcolatrice otteniamo tan(19.5°) = 0.3541, dunque $d = \frac{1{,}25km}{0.3541}$
d = 3,502 km (approssimato *d* = 3,50 km).

Funzioni goniometriche inverse



Le funzioni goniometriche inverse consentono di determinare il valore dell'angolo α noto il valore del sen(α), cos(α) e tan(α).

Supponiamo di avere un triangolo come in figura. Per determinare il valore dell'angolo α si procede nel seguente modo:

sappiamo che per definizione:

$\sin(a) = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin(a) = \frac{5}{14} = 0.35714$ Ora noto il valore del sin(α), utilizzando la funzione inversa del seno (sin $^{-1}$) si può risalire al **valore dell'angolo il cui seno è pari a 0.35714** $\alpha = \sin^{-1}(0.35714) = 20.92°$ Ovviamente, anche in questo caso il valore è stato ottenuto utilizzando la calcolatrice.

Le funzioni goniometriche inverse più comuni sono:

$$\boxed{\alpha = \sin^{-1}(...) \qquad \alpha = \cos^{-1}(...) \qquad \alpha = \tan^{-1}(...)}$$

Queste funzioni restituiscono il valore dell'angolo α noto il valore del sin(α), del cos(α) o della tan(α).