EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\ddot{Y}(x) + a\dot{Y}(x) + bY(x) = 0 \text{ con a,b} \in \mathbb{R}$$

Si scrive il polinomio caratteristico $\boldsymbol{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$ e si determinano le soluzioni in $\mathbb{C}$

$\Delta > 0 \rightarrow$ due soluzioni reali e distinte λ_1 e λ_2	$Y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ Con c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0 \rightarrow$ due soluzioni reali e coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a}{2}$	$Y(x) = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$
$\Delta < 0 \rightarrow$ due soluzioni complesse e coniugate $\alpha = -\frac{a}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$ $\alpha \pm i\beta$	$Y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ oppure ponendo $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ $Y(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x + \varphi)$

Le costanti si determinano in base alle condizioni iniziali

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE NON OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$\ddot{Y}(x) + a\dot{Y}(x) + bY(x) = p(x) \text{ con a,b} \in \mathbb{R}$$

In questo caso la soluzione è data dalla somma dell'integrale generale della corrispondente equazione differenziale lineare omogenea associata e di un integrale particolare della equazione completa. Sia $p(x)$ un polinomio di grado $\boldsymbol{n}$: un integrale particolare $q(x)$ dell'equazione completa sarà anch'esso un polinomio i cui coefficienti si determinano in modo che esso soddisfi l'equazione completa. Il grado $\boldsymbol{m}$ di questo polinomio soluzione sarà al massimo $\boldsymbol{n+2}$ e precisamente:

se $b \neq 0 \ \rightarrow m = n$

se $b = 0 \ \wedge a \neq 0 \ \rightarrow m = n + 1$

se $b = 0 \ \wedge a = 0 \ \rightarrow m = n + 2$

Noto il grado del polinomio $q(x)$ lo si scrive (esempio se n=2 si ha $q(x) = ax^2 + bx + c$ poi si determinano le derivate prima e seconda e si sostituiscono nella equazione completa e si ricavano i coefficienti.

ESEMPIO: $\boldsymbol{\ddot{Y}(x) + 2\dot{Y}(x) = x}$

La soluzione particolare $q(x)$ si ottiene osservando che $p(x)$ è un polinomio di grado 1 e poiché *b=0* il grado della soluzione particolare sarà $m = n + 1 = 1 + 1 = 2$. $q(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow \ q'(x) = 2ax + b \ \ e \ \ q''(x) = 2a$. Ora sostituisco nella equazione completa e ricavo i coefficienti: $2a + 2(2ax + b\ ) = x$ sviluppando si ha: $4a = 1 \ e \ 2a + 2b = 0$ segue $a = \frac{1}{4} \ e \ b = -\frac{1}{4}$

$q(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + c$ questa soluzione va sommata alla soluzione dell'equazione omogenea associata $\boldsymbol{\ddot{Y}(x) + 2\dot{Y}(x) = 0}$ che vale:

$Y(x) = c_1 + c_2e^{-2x}$. La soluzione generale sarà: $Y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + c \ \rightarrow \ \ Y(x) = c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + c_3$