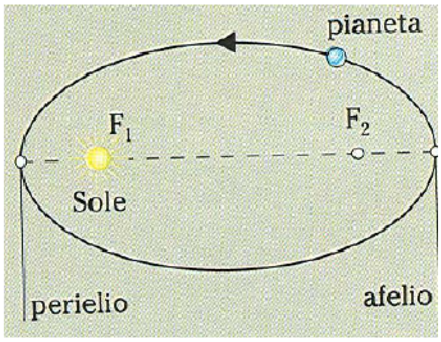
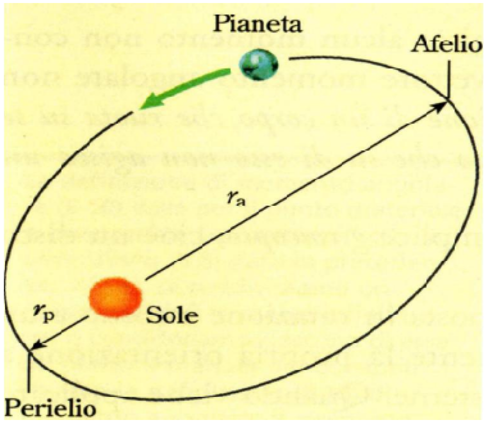
prima legge di Keplero

Ogni pianeta descrive attorno al Sole un'orbita ellittica in cui il Sole occupa uno dei fuochi.



Seconda legge di Keplero

Il raggio vettore che va dal Sole a un pianeta "spazza" aree uguali in intervalli di tempo uguali.



La forza di attrazione gravitazionale è una forza centrale per cui si ha:

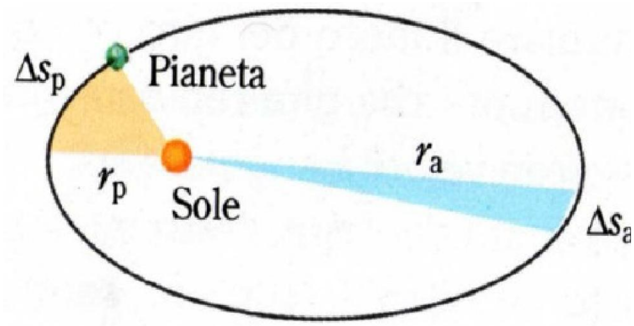
$\vec{L} = cost \;\; \vec{L}_A = \vec{L}_P \quad \rightarrow \quad I_P \cdot \vec{\omega}_P = I_A \cdot \vec{\omega}_A$ ma $\quad I = m \cdot R^2$

$m \cdot R_P^2 \cdot \vec{\omega}_P = m \cdot R_A^2 \cdot \vec{\omega}_A$ e ricordando che $\omega = \frac{v}{R}$ e tralasciando la notazione vettoriale si ha: $R_P^2 \cdot \frac{v_P}{R_P} = R_A^2 \cdot \frac{v_A}{R_A} \rightarrow \;\; v_P \cdot R_P = v_A \cdot R_A$

Moltiplicando entrambi i termini per $\frac{1}{2}\Delta t$ si ha:

$$\frac{1}{2}\Delta t \;\cdot v_P \cdot R_P = \frac{1}{2}\Delta t \;\cdot v_A \cdot R_A \rightarrow \frac{1}{2}\,\Delta S_P \cdot R_P = \frac{1}{2}\,\Delta S_A \cdot R_A$$

$$AREA_A = AREA_P$$



Quindi nell'intervallo Δt, il raggio vettore che congiunge il sole al pianeta, "spazza" aree uguali in tempi uguali.

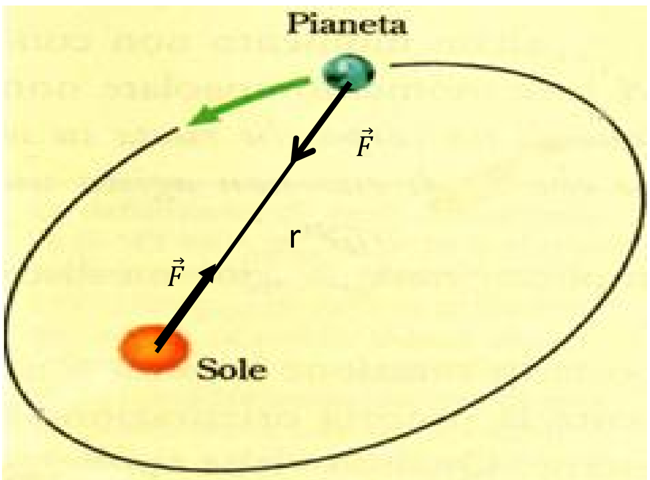
La velocità areolare è costante.

Terza legge di Keplero

Il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è lo stesso per tutti i pianeti.

La forza di attrazione gravitazionale è data da:

$$F = G\frac{m_T \cdot m_S}{r^2}$$



Questa forza rappresenta la forza centripeta che costringe la terra a ruotare su un'orbita circolare:

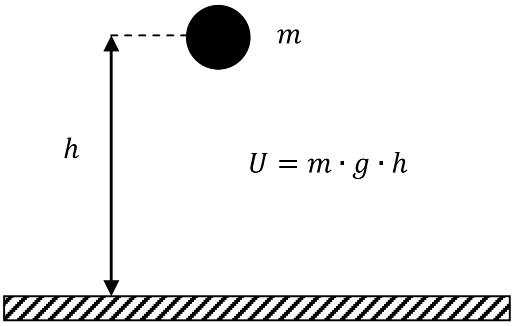
$$m_T\frac{v^2}{r} = G\,\frac{m_T \cdot m_S}{r^2} \;\rightarrow\; m_T \cdot \omega^2 r = G\,\frac{m_T \cdot m_S}{r^2} \;\rightarrow\; \omega^2 r = G\,\frac{m_S}{r^2}$$

$\omega^2 \cdot r^3 = G \cdot m_S$ ma $\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} \rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^3 = G \cdot m_S$

Infine: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot m_S}{4\pi^2} \qquad \boldsymbol{\frac{r^3}{T^2} = K}$

La costante K dipende dalla massa del corpo attrattore

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE



L'energia potenziale scritta in questa forma :

$U = m \cdot g \cdot h$ vale solo se la distanza $h \ll R_T$

Cioè se la distanza dalla superficie della Terra è molto minore del raggio della Terra.

In generale se la forza è conservativa (il lavoro della forza è nullo in un percorso chiuso) si può introdurre una funzione potenziale U tale che $L = \Delta U$. La forza di attrazione gravitazionale tra due masse è data da: $F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$

Questa forza ammette un potenziale $U(r) = \int G\frac{m \cdot M}{r^2} d_r \;\; \rightarrow \;\; U(r) = \frac{-G \cdot m \cdot M}{r}$ dove m rappresenta la massa di un corpo e M la massa della Terra. La funzione $U(r) = \frac{-G \cdot m \cdot M}{r}$ si chiama energia potenziale gravitazionale. Il valore di questa funzione è il seguente: $L_{A \rightarrow B} = \Delta U$ (il lavoro che il campo gravitazionale compie su una massa quando la massa si muove da un punto A ad un punto B è pari alla variazione dell'energia potenziale).

La funzione potenziale $U(r)$ assume un valore negativo. $U(r) \rightarrow 0 \;\; per \; r \rightarrow \infty$

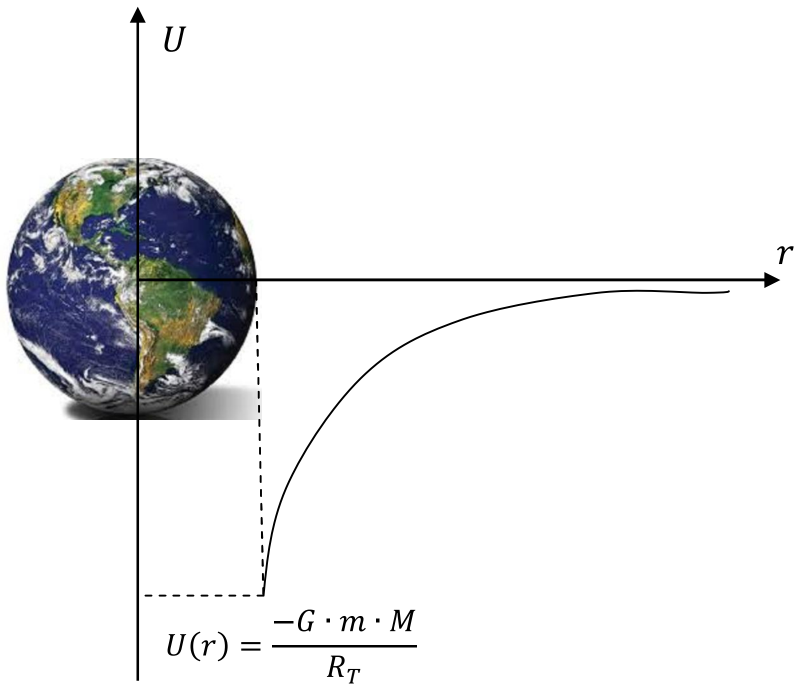
Il lavoro del campo gravitazionale compiuto su una massa quando questa si sposta da un punto A ad un punto B (posto ad una altezza h dalla superficie della terra) è dato da:

$$L_{A \rightarrow B} = \Delta U = U_A - U_B = \frac{-G \cdot m \cdot M}{R_T} + \frac{G \cdot m \cdot M}{(R_T + h)}$$

$$L_{A \rightarrow B} = -GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h}\right)$$

$$L_{A \rightarrow B} = -GmM\left(\frac{R + h - R}{R(R + h)}\right)$$

$$L_{A \rightarrow B} = -GmM\left(\frac{h}{R(R + h)}\right)$$



ma se $h \ll R_T$ si ha:

$$L_{A \rightarrow B} = -GmM\left(\frac{h}{R^2}\right)$$

$$L_{A \rightarrow B} = -GmM\left(\frac{h}{R^2}\right) = -m \cdot \left(\frac{G \cdot M}{R^2}\right) \cdot h = -m \cdot g \cdot h \quad con\ \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{G \cdot M}}{\boldsymbol{R^2}}$$

Accelerazione di gravità. $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ sulla superficie della Terra.

ENERGIA MECCANICA

L'energia meccanica è data dalla somma tra l'energia cinetica (K) e l'energia potenziale (U).

$$\boldsymbol{E = k + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{R_T}}$$

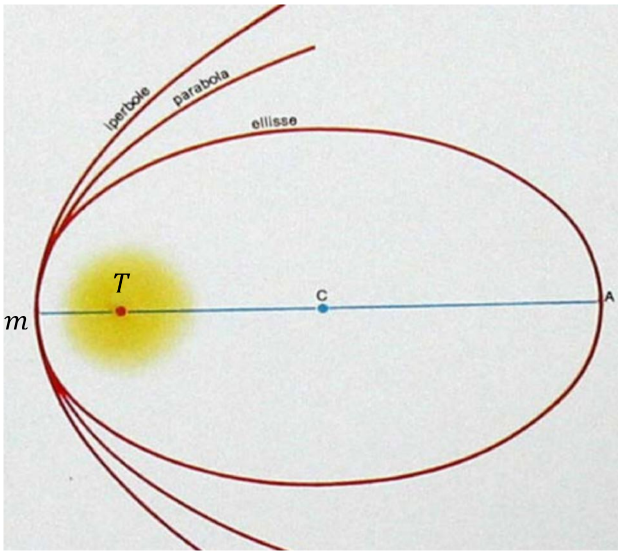
Se l'energia totale di un corpo è minore di zero si dice che il ***sistema è legato***.

Velocità di fuga

La velocità di fuga è la velocità da imprimere ad un oggetto in modo tale da "liberarlo definitivamente" dall'attrazione gravitazionale del pianeta. L'oggetto sarà completamente libero dal'effetto dell'attrazione gravitazionale del pianeta nel momento in cui sarà in grado di arrivare a una distanza infinita dal pianeta con velocità nulla. In formule $\boldsymbol{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{G \cdot m \cdot M}{r} = 0}$

Da questa formula si può ricavare la velocità di fuga:

$$\boldsymbol{v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$



se $v < v_f$ il corpo è destinato a tornare sul pianeta.

Se $v = v_f$ il corpo ha energia esattamente sufficiente per allontanarsi definitivamente dal pianeta da cui viene lanciato ,arrivando a distanza infinita con velocità nulla. In questo caso la sua traiettoria è parabolica, con il pianeta occupante il fuoco della parabola. Infine, se $v > v_f$, il corpo si allontana definitivamente dal pianeta e giunge a distanza infinita con velocità non nulla. In questo caso la traiettoria è iperbolica e il pianeta occupa uno dei fuochi dell'iperbole. Per la Terra la velocità di fuga è pari a circa $11.2\ km/s$ (trascurando gli attriti).