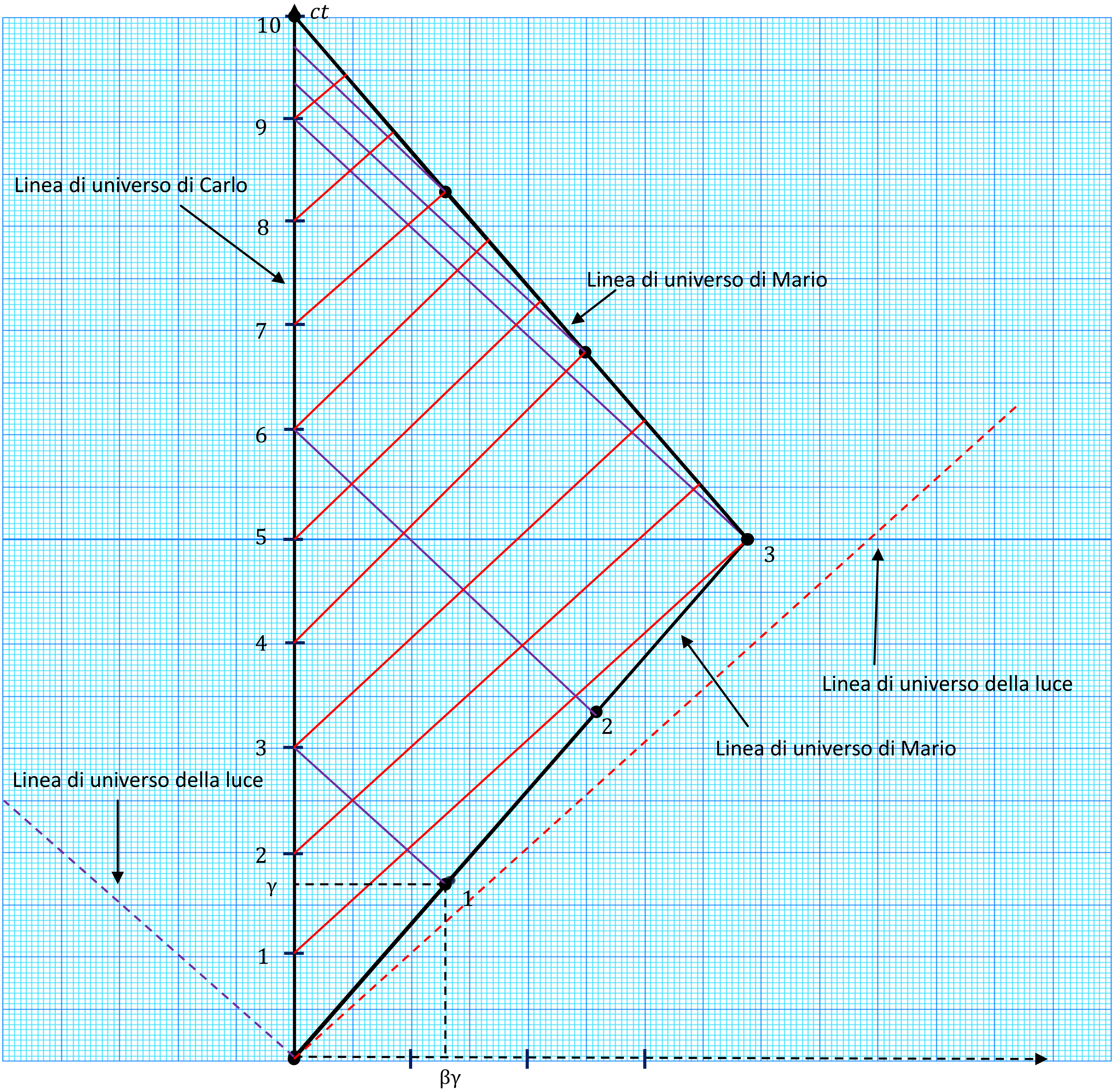
PARADOSSO DEI GEMELLI O DEGLI OROLOGI

Mario (fratello gemello di Carlo) decide di intraprendere un viaggio spaziale mentre Carlo rimane sulla Terra. Prima di partire sincronizzano gli orologi e si accordano di inviare un segnale radio con cadenza annuale. Marco si allontana dalla Terra con velocità $v = 0{,}8\ c$. Dopo tre anni di viaggio (tempo proprio di Mario) Mario decide di tornare e impiega altri tre anni per raggiungere la Terra. Come si può notare dal diagramma riportato sotto i tempi indicati dagli orologi al ritorno sono diversi (10 anni Carlo e 6 anni Mario). Il paradosso sta nel fatto che, come afferma la relatività, la situazione dovrebbe essere simmetrica. In realtà la situazione non è simmetrica in quanto Carlo rimane in un sistema di riferimento inerziale mentre Mario no in quanto per tornare deve invertire il suo moto.



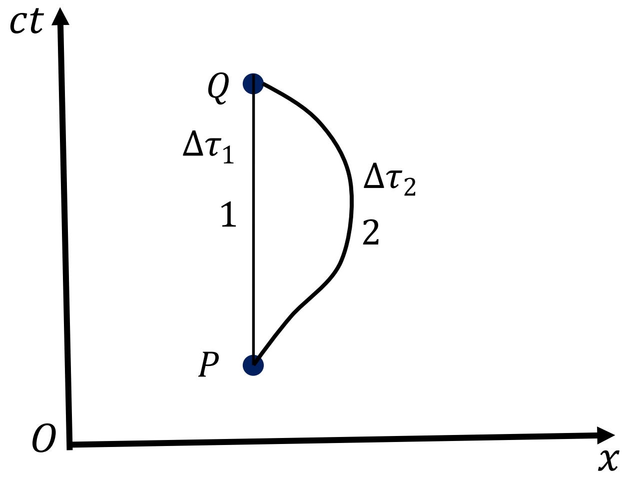
Per spiegare dal punto di vista numerico questo risultato occorre utilizzare l'effetto Doppler relativistico. Nella fase di allontanamento la frequenza percepita è data da: $f = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \sqrt{\frac{c-0{,}8c}{c+0{,}8c}} = \frac{1}{3}$ quindi se la frequenza con cui Carlo emette i segnali radio è pari a 1 segnale ogni anno Mario riceverà i segnali con una frequenza pari a $\frac{1}{3}$ (un segnale in tre anni) e come si può vedere dal grafico la situazione è perfettamente simmetrica per Carlo.

Nella fase di avvicinamento la frequenza percepita è data da: $f = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \sqrt{\frac{c+0{,}8c}{c-0{,}8c}} = 3.$

In questo caso Mario riceve nove segnali da Carlo durante il viaggio di ritorno che avviene in tre anni (tempo proprio di Mario). Complessivamente, Mario riceve dieci segnali da Carlo. mentre Carlo riceve complessivamente sei segnali da Mario. Non vi è disaccordo sui segnali: Mario ne manda sei e Carlo ne riceve sei, Carlo ne manda dieci e Mario ne riceve dieci.

DIPENDENZA DEL TEMPO PROPRIO DAL PERCORSO

Si consideri un diagramma spazio temporale del tipo in figura. I due eventi possono essere collegati con diverse linee di universo e di conseguenza la distanza percorsa dipenderà dal percorso considerato. Anche il tempo proprio registrato dagli orologi connessi alle linee di universo dipenderà dal percorso scelto.



$$dt = \gamma d\tau \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ portando dt sotto il segno di radice si ha: $d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dt^2 \cdot v^2}{c^2}} = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}}$

Quindi si ha: $d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}}$ per determinare $\Delta\tau$ è sufficiente integrare tra i due eventi.

$\Delta\tau = \int_P^Q \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}}$. Per determinare $\Delta\tau_1$ occorre integrare lungo la linea di universo 1 mentre per determinare $\Delta\tau_2$ occorre integrare lungo la linea di universo 2.

$\Delta\tau_1 = \int_P^Q \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}}$ ma lungo la linea di universo 1 $dx = 0$ per cui si ha: $\Delta\tau_1 = \int_P^Q \sqrt{dt^2 - 0} = \int_P^Q dt = t_Q - t_P$.

Lungo la linea di universo 2 $\Delta\tau_2 = \int_P^Q \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2}{c^2}}$ e poiché $dx^2 > 0$ si ha: $\Delta\tau_2 < \Delta\tau_1$.

I due orologi, sincronizzati nell'evento P segneranno tempi diversi al loro incontro nell'evento Q, in particolare, l'orologio viaggiante registrerà un intervallo di tempo minore.

In generale il tempo proprio registrato da un orologio solidale con un riferimento inerziale risulterà sempre maggiore del tempo registrato da qualsiasi altro orologio solidale con un riferimento non inerziale.