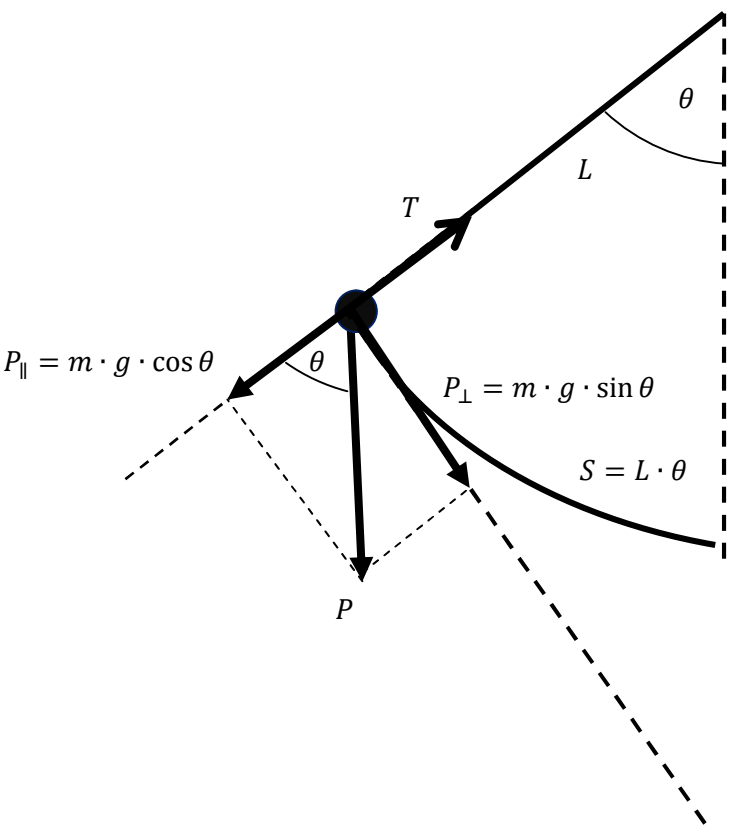
PENDOLO SEMPLICE



Le forze che agiscono sulla massa sono il peso (P) e la tensione (T) della fune.

Scomponendo il peso nelle componenti parallela e ortogonale alla fune si ha:

$$P_{\parallel} = m \cdot g \cdot \cos\theta$$
$$P_{\perp} = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

La forza tangenziale che agisce sulla massa, e che costringe il pendolo a ritornare nella posizione di equilibrio è la componente $P_{\perp}$.

$F = -m \cdot g \cdot \sin\theta$ per piccoli valori di θ si ha $\sin\theta \cong \theta$

$quindi\ F = m \cdot g \cdot \theta$

La lunghezza dell'arco $S = L \cdot \theta \ \rightarrow \ \theta = \frac{S}{L}$

$F = -m \cdot g \cdot \frac{S}{L}$ che può essere riscritta:

$$F = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot S.$$

Questa forza è una forza proporzionale allo spostamento analoga alla forza elastica $F = -k \cdot x$

Nel caso di una massa vincolata ad una molla $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. In questo caso $k = \frac{m \cdot g}{L} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g}}{\boldsymbol{L}}}$ ricordando che

$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$.

Quindi il periodo di oscillazione di un pendolo semplice per piccole oscillazioni è dato da:

$$\boldsymbol{T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Una soluzione più dettagliata fa uso delle equazioni differenziali:

sul corpo agiscono due forze: la forza peso P e la tensione del filo T. Ipotizzando che tutta la massa del sistema sia concentrata nel corpo di massa m e che quindi il filo sia privo di massa e inestensibile, per la II legge di Newton: $\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$

Ovviamente il corpo, a causa del filo inestensibile, si potrà solo muovere lungo l'arco di cerchio di lunghezza L e centrato nel punto di sospensione. Il corpo e' soggetto a due accelerazioni, una tangenziale a_t e una centripeta a_c.

Introducendo un sistema di riferimento come in figura si ha:

$$\begin{cases} m \cdot a_c = T - P_{\parallel} \\ m \cdot a_t = -P_{\perp} \end{cases} \qquad \begin{cases} m \cdot \omega^2 \cdot L = T - m \cdot g \cdot \cos\theta \\ m \cdot a_t = -m \cdot g \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Introducendo (α) accelerazione angolare $\alpha = \ddot{\theta}$ ➔ $a_t = L \cdot \ddot{\theta}$

Per determinare il periodo di oscillazione del pendolo si fa uso della seconda equazione:

$m \cdot L \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot \sin\theta \;\rightarrow\; L \cdot \ddot{\theta} = -g \cdot \sin\theta$

Per piccoli angoli (piccole oscillazioni) si ha $\sin\theta \approx \ddot{\theta}$

$L \cdot \ddot{\theta} = -g \cdot \theta$ ➔ $\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$ formalmente identica all'equazione di un moto armonico.

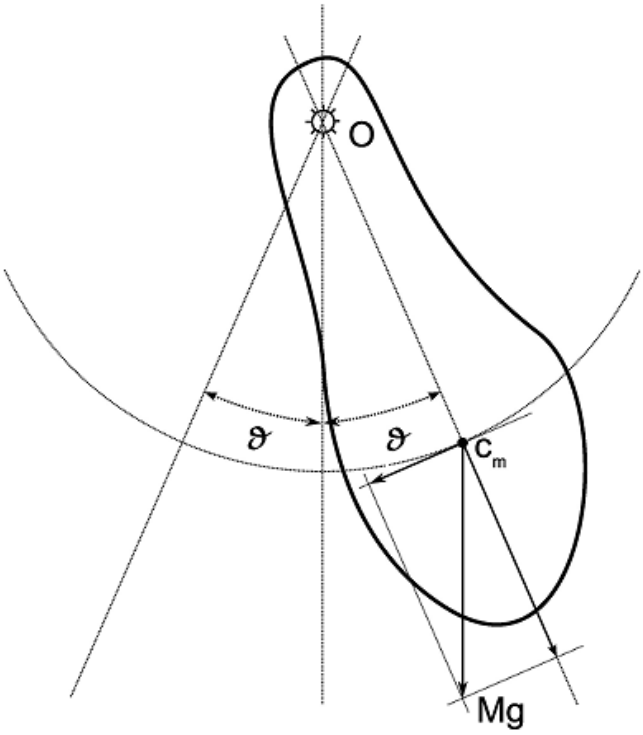
La soluzione generale è data da: $\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ con $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Il periodo è dato da:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Se non è possibile utilizzare l'approssimazione delle piccole oscillazione, una buona approssimazione è data da:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\theta_{max}}{16}\right)}$$

Il pendolo fisico



Il pendolo semplice non è che un caso ideale di un oggetto fisico chiamato pendolo fisico e costituito da un corpo rigido vincolato ad un punto di sospensione O tramite una cerniera.

Siano M la massa del corpo rigido, I il momento d'inerzia rispetto al centro di rotazione O e d la distanza tra il centro di massa ed il centro di rotazione O.

Scegliendo come polo il cento di rotazione O, l'unica forza da considerare è il peso Mg, il momento della quale è la coppia τ_z che tende a riportare il pendolo in posizione verticale:

$\tau_z = -Mgdsin(\theta)$

Scrivendo l'equazione di Newton per la dinamica rotazionale $\sum \tau = I\alpha$ si ottiene $-Mgdsin(\theta) = I\ddot{\theta}$ che per piccole oscillazioni diventa: $-Mgd\theta = I\ddot{\theta}$. L'equazione del moto è $\ddot{\theta} + \frac{Mdg}{I}\theta = 0$ che ammette come soluzione generale $\theta(t) = \theta_{max}\cos(\sqrt{\frac{Mdg}{I}}t + \varphi_0)$ quindi il periodo delle oscillazioni è dato da:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}}}$$

Si nota quindi che un pendolo fisico di massa M , momento d'inerzia I e centro di massa a distanza d dalla cerniera ha periodo delle oscillazioni identico ad un pendolo semplice di lunghezza $L = \frac{I}{Md}$