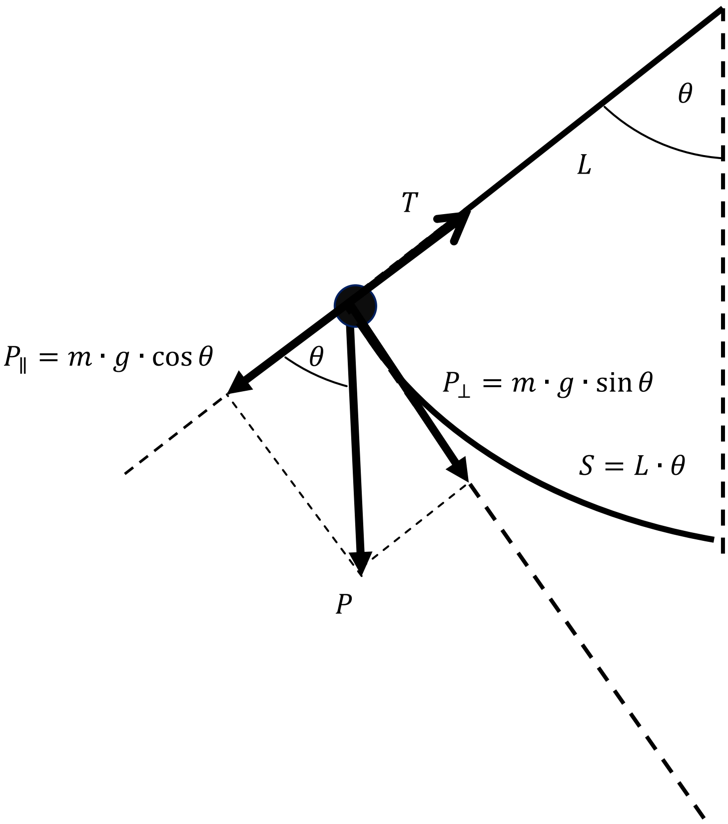
PENDOLO SEMPLICE



Le forze che agiscono sulla massa sono il peso (P) e la tensione (T) della fune.

Scomponendo il peso nelle componenti parallela e ortogonale alla fune si ha:

$$P_{\parallel} = m \cdot g \cdot \cos\theta$$
$$P_{\perp} = m \cdot g \cdot \sin\theta$$

La forza tangenziale che agisce sulla massa, e che costringe il pendolo a ritornare nella posizione di equilibrio è la componente $P_{\perp}$.

$F = -m \cdot g \cdot \sin\theta$ per piccoli valori di θ si ha $\sin\theta \cong \theta$

$quindi\ F = m \cdot g \cdot \theta$

La lunghezza dell'arco $S = L \cdot \theta \ \rightarrow \ \theta = \frac{S}{L}$

$F = -m \cdot g \cdot \frac{S}{L}$ che può essere riscritta:

$$F = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot S.$$

Dalla seconda legge della dinamica si ha: $m \cdot a = -\frac{m \cdot g}{L} \cdot S \ \rightarrow \ a = -\frac{g}{L} \cdot S$

Questa è l'accelerazione di un moto armonico $a = -\omega^2 \cdot x$ con $\omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$

Quindi il periodo di oscillazione di un pendolo semplice per piccole oscillazioni è dato da: $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$

Se non è possibile utilizzare l'approssimazione delle piccole oscillazione, una buona approssimazione è data da:

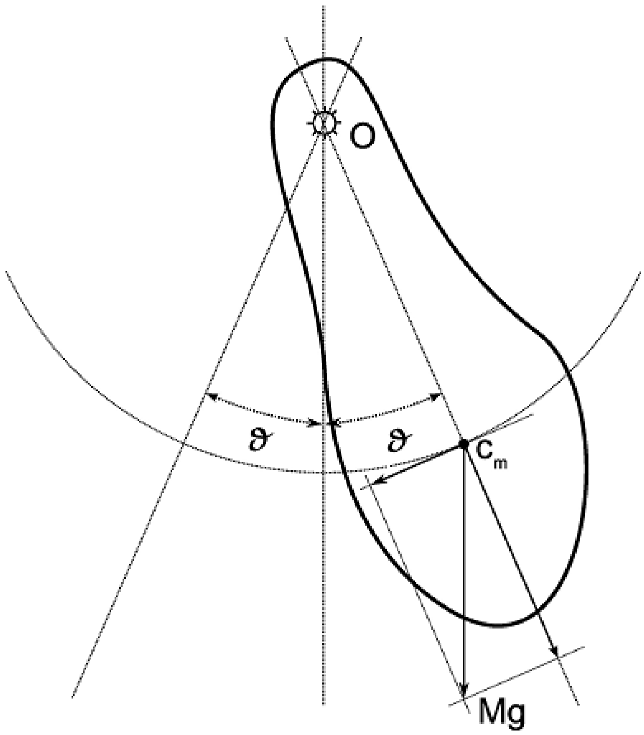
$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\theta_{max}}{16}\right)}$$

Valore del seno di α per $\alpha \leq 10°$

θ(gradi)	θ(rad)	sin(θ)
0	0,000	0,000
1	0,017	0,017
2	0,035	0,035
3	0,052	0,052
4	0,070	0,070
5	0,087	0,087
6	0,105	0,105
7	0,122	0,122
8	0,140	0,140
9	0,157	0,157
10	0,174	0,174

Come si può notare dalla tabella a lato il valore del seno di un angolo coincide con il valore dell'angolo (espresso in radianti) fino alla terza cifra decimale per $\alpha \leq 10°$

Il pendolo fisico



Il pendolo semplice non è che un caso ideale di un oggetto fisico chiamato pendolo fisico e costituito da un corpo rigido vincolato ad un punto di sospensione O tramite una cerniera.

Siano M la massa del corpo rigido, I il momento d'inerzia rispetto al centro di rotazione O e d la distanza tra il centro di massa ed il centro di rotazione O.

Scegliendo come polo il cento di rotazione O, l'unica forza da considerare è il peso Mg, il momento della quale è la coppia τ_z che tende a riportare il pendolo in posizione verticale:

$\tau_z = -Mgdsin(\theta)$

Scrivendo l'equazione di Newton per la dinamica rotazionale $\sum \tau = I\alpha$ si ottiene $-Mgdsin(\theta) = I\ddot{\theta}$ che per piccole oscillazioni diventa: $-Mgd\theta = I\ddot{\theta}$. L'equazione del moto è $\ddot{\theta} + \frac{Mdg}{I}\theta = 0$ che ammette come soluzione generale $\theta(t) = \theta_{max}\cos(\sqrt{\frac{Mdg}{I}}t + \varphi_0)$ quindi il periodo delle oscillazioni è dato da:

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mdg}}}$$

Si nota quindi che un pendolo fisico di massa M , momento d'inerzia I e centro di massa a distanza d dalla cerniera ha periodo delle oscillazioni identico ad un pendolo semplice di lunghezza $L = \frac{I}{Md}$