VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA (ERRORE ASSOLUTO) NELLE MISURE DIRETTE

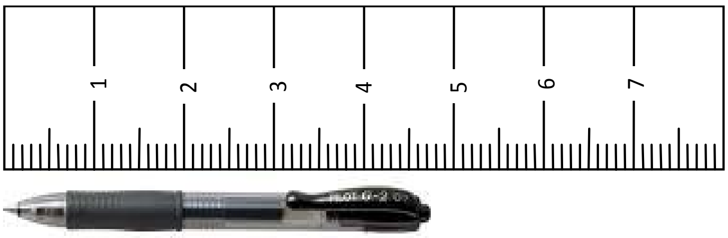
Nelle misure dirette di grandezze fisiche l'errore assoluto o incertezza o semidispersione viene determinata nel seguente modo:

TIPO DI MISURA	ERRORE ASSOLUTO E_a	RISULTATO DELLA MISURA
SINGOLA MISURA	Sensibilità dello strumento	Valore misurato
MISURE RIPETUTE	Il valore più grande tra la **Sensibilità dello strumento** e **l'incertezza statistica** $\boldsymbol{E_a = \frac{Valore\ massimo - valore\ minimo}{2}}$	Valore medio delle misure $\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} V_1 + V_{2+\dots}V_n$

Il risultato di una misura si scrive con la seguente notazione:

Simbolo della grandezza fisica = (Valore della grandezza fisica ± Errore assoluto) Unità di misura

<u>Esempio 1 :</u>



Supponiamo di misurare la lunghezza di una penna. Se effettuiamo una sola misura scriveremo:

L = (4,7 ± 0,1) cm in quanto la sensibilità dello strumento è pari a 0,1 cm.

<u>Esempio 2 :</u>

Supponiamo di misurare degli intervalli tempo

t_1 = (3,68 ± 0,01) s t_2 = (3,56 ± 0,01) s t_3 = (3,63 ± 0,01) s t_4 = (3,63 ± 0,01) s t_5 = (3,73 ± 0,01) s

t_6 = (3,70 ± 0,01) s t_7 = (3,71 ± 0,01) s t_8 = (3,63 ± 0,01) s t_9 = (3,80 ± 0,01) s t_{10} = (3,73 ± 0,01) s

In questo caso la sensibilità dello strumento è pari a **0,01 s** mentre l'incertezza statistica E_a è data da:

$\boldsymbol{E_a = \frac{Valore\ massimo - valore\ minimo}{2} = \frac{3{,}80 - 3{,}56}{2}}$ = **0,12 s** e risulta maggiore della sensibilità dello strumento.

Il valore media delle misure è pari a: $\bar{t} = \frac{3{,}68+3{,}56+3{,}63+3{,}63+3{,}73+3{,}70+3{,}71+3{,}63+3{,}80+3{,}73}{10} = 3{,}68\mathrm{s}$

si potrebbe pensare di scrivere il risultato come t = (3,68 ± 0,12) s. Invece il risultato non si scrive in questa maniera perché occorre approssimare sia l'errore assoluto sia la media, procedendo in questo modo:

1. L'errore assoluto deve essere approssimato alla prima cifra diversa da zero che si incontra leggendo il numero da <u>sinistra verso destra</u>. L'approssimazione deve essere eseguita in questo modo: se la cifra successiva è compresa fra 0 e 4 si arrotonda per difetto, se è compresa fra 5 e 9 si arrotonda per eccesso. In questo caso tale cifra è uno (1) e dopo c'è la cifra 2, per cui l'errore assoluto si scriverà 0,1.
2. Il valore medio deve essere arrotondato allo stesso livello dell'incertezza già arrotondata. cioè in corrispondenza della posizione dell'unica cifra diversa da zero dell'incertezza assoluta già arrotondata. In altre parole se l'errore assoluto è stato arrotondato ai centesimi, anche il valore medio va arrotondato ai centesimi, e così via. In questo modo, l'ultima cifra in qualunque risultato approssimato deve essere nella stessa posizione decimale dell'incertezza già approssimata. Nel caso esaminato, visto che l'errore assoluto è arrotondato ai decimi di secondo, anche la media sarà arrotondato nello stesso modo. Poiché dopo il 6 c'è la cifra 8, il valore diventerà 3,7. Quindi il risultato è: **t = (3,7 ± 0,1) s**

Esempio 3 :

9 studenti misurano il tempo di caduta di una biglia con degli orologi aventi una sensibilità di 1 secondo.

Ottenendo i seguenti risultati:
t_1=(5±1) s t_2=(5±1) s t_3=(6±1) s t_4=(5±1) s t_5=(5±1) s

T_6=(6±1) s t_7=(5±1) s t_8=(5±1) s t_9=(5±1) s.

In questo caso la media è:

$$\bar{t} = \frac{5 + 3{,}56 + 5 + 6 + 5 + 5 + 6 + 5 + 5 + 5}{9} = 5{,}2\text{s}$$

mentre l'errore assoluto è:

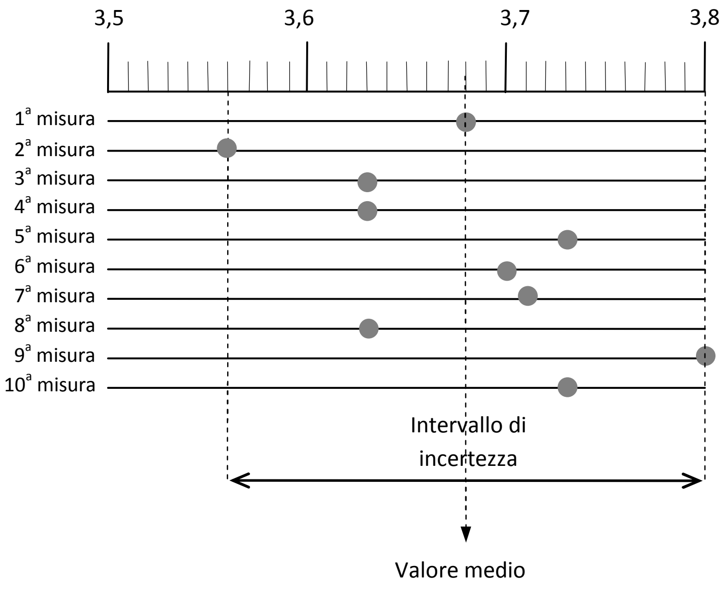
$$\boldsymbol{E_a} = \frac{\boldsymbol{Valore\ massimo - valore\ minimo}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{6-5}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}5\ s}$$

Quindi sembra che il risultato finale debba essere scritto come: t=(5,2 ± 0,5) s
Ma in realtà ogni singola misura ha un'incertezza di 1s ed è ineliminabile, allora, anche se si fanno più misure, non si può pensare di ottenere un'incertezza finale minore di 1s.

In generale, se ogni singola misura è incerta entro un valore Δ_x (incertezza strumentale), anche il risultato finale sarà incerto <u>almeno</u> entro questo valore. Quindi l'errore da associare al risultato finale sarà quello strumentale, e la media dovrà essere approssimata al valore 5, cioè: t=(5±1) s

ERRORE RELATIVO E PERCENTUALE

Nell' ***Esempio 2*** si è visto che il valore più vicino al valore vero è dato dal valore medio t = (3,7 ± 0,1) s. L'errore assoluto (0,1 s) fornisce un'indicazione dell'intervallo in cui si può trovare il valore reale della grandezza misurata.



Per stabilire se l'errore commesso possa risultare accettabile, è necessario calcolare l'**errore relativo E_r.**

L'**errore relativo** si ottiene facendo il rapporto tra l'errore assoluto e il valore medio della grandezza $E_r = \frac{E_a}{\bar{V}}$.

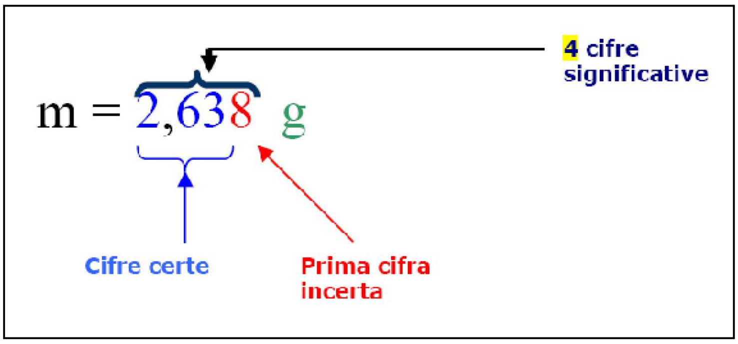
In altre parole **E_r** rappresenta un confronto tra l'errore commesso nel misurare una grandezza fisica e il valore che tale grandezza assume. Commettere un errore di 1m (metro) nel misurare una lunghezza può risultare molto grave o trascurabile: dipende da ciò che si è misurato. **E_r** non ha alcuna unità di misura in quanto è dato dal rapporto tra due grandezze omogenee. A volte si usa indicare l'errore in forma percentuale **$E_{\%}$.**

$$E_{\%} = E_r \cdot 100$$

Nell' ***Esempio 2*** $E_r = \frac{E_a}{\bar{V}} = \frac{0{,}1}{3{,}7} = 0.03 \quad mentre\ E_{\%} = E_r \cdot 100 = 0.03 \cdot 100 = 3\%$

CIFRE SIGNIFICATIVE

Ogni strumento di misura è caratterizzato da una propria sensibilità, definita come la minima quantità che lo strumento è in grado di apprezzare. Per esempio, la misura di una massa fornisce il valore di 2,638 g. Significa che l'intervallo minimo tra due misure è 0,001 g e questo rappresenta la **sensibilità** dello strumento. La bilancia permette di determinare con sicurezza il numero di grammi (2), di decigrammi (6), di centigrammi (3), ma non di milligrammi. Il valore numerico di una misura sperimentale deve contenere tante cifre, dette CIFRE SIGNIFICATIVE, quante sono quelle determinabili con sicurezza mediante lo strumento di misura utilizzato (cifre certe), più un'altra cifra, anch'essa significativa, che lo strumento permette di valutare con approssimazione (prima cifra incerta).



Il valore numerico di una grandezza fisica deve essere scritto sempre con un ***numero appropriato di cifre significative***, in modo da non dare false indicazioni sulla precisione della misura stessa. Ad esempio, se il valore di una massa, misurata con una bilancia sensibile al decimo di grammo, fosse di 10,3 g e volessimo esprimere tale valore in milligrammi, sarebbe sbagliato scrivere 10300 mg. Questo numero, infatti, contiene 5 cifre significative, mentre la bilancia ha fornito solo 3 cifre significative! Correttamente si dovrebbe scrivere: 10,3 g = $1{,}03 \cdot 10^4$ mg

Gli zeri a sinistra di un numero **non sono** significativi mentre gli zeri compresi fra altre due cifre diverse da zero sono significativi. Se lo zero è l'ultima cifra di una misura è una cifra significativa. Nel passaggio alla numerazione esponenziale occorre mantenere il numero di cifre significative.

misura	Numero di cifre significative
1,503 g	4
21,50 g	4
520 g	4
30 ml	2
1,0 l	2
0,235 g	3
0,0235 g	3
0,00750 g	3
0,0080 g	2
8315 g = $8{,}315 \cdot 10^3$g	4
0,0076 cm = $7{,}6 \cdot 10^{-3}$cm	2

ARROTONDAMENTI

Quando il valore numerico di una grandezza fisica contiene un numero di cifre superiore a quello delle cifre significative, esso deve essere arrotondato. L'arrotondamento si effettua eliminando tutte le cifre che seguono l'ultima cifra significativa secondo le seguenti regole:

a) se la prima delle cifre eliminate è maggiore o uguale a 5, si aumenta l'ultima cifra significativa di una unità. Esempio: per arrotondare a 4 cifre significative la misura 15,37~~**6**~~ 15,38

b) se la prima delle cifre eliminate è minore di 5, l'ultima cifra significativa resta in invariata. Esempio: per arrotondare a 4 cifre significative la misura 15,37~~**3**~~ 15,37

OPERAZIONI

Nell'esecuzione delle varie operazioni matematiche tra misure la precisione del risultato non può essere superiore alla precisione del dato sperimentale **meno** preciso che viene utilizzato.

Addizione e sottrazione di misure

Il risultato dell'operazione deve contenere lo stesso ***numero di decimale*** dell'addendo o del sottraendo che ne contiene il minor numero.

Esempi: (27,**8**+ 3,175 + 42,24) g = 73,2~~15~~ g 73,**2** g

(**142**–3,264) ml = 138,~~736~~ ml **139** ml

Moltiplicazione e divisione di misure

Il risultato della moltiplicazione o della divisione deve contenere lo stesso numero di cifre significative presenti nel fattore meno preciso.

Esempi: 5,326 ml ·**1,16** g/ml = **6,18** g (3 cifre significative)

117 g / **7,6** ml = **15** g/ml (2 cifre significative)

In genere nei calcoli intermedi si utilizza una cifra significativa in più rispetto al numero esatto di cifre significative e si arrotonda al numero giusto alla fine.

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI NELLE MISURE INDIRETTE

Tutte le misure ottenute tramite operazioni matematiche tra altre grandezze fisiche sono dette **INDIRETTE**. Poiché tutte le misure dirette sono affette da errori, lo saranno anche tutte le misure indirette che da esse derivano. Diremo quindi che gli errori di misura sulle misure dirette si sono **propagati** alle misure indirette.

Consideriamo una generica grandezza ***G*** ottenuta indirettamente **dalla somma e/o differenza** di altre grandezze, per es. a, b e c $\quad G = a + b - c$

Si può dimostrare che **l'errore assoluto** sulla grandezza G si ottiene con la seguente regola: $\mathcal{E}_{a(G)} = \mathcal{E}_{a(a)} + \mathcal{E}_{a(b)} + \mathcal{E}_{a(c)}$.

Cioè l'errore assoluto della grandezza G si ottiene sommando gli errori assoluti delle grandezze che la definiscono.

Se una generica grandezza ***G*** è ottenuta indirettamente attraverso **il prodotto o la divisione** di altre grandezze, per es. a, b e c $\quad G = \frac{a \cdot b}{c}$

Si può dimostrare che **l'errore relativo** sulla grandezza G si ottiene con la seguente regola:

$\mathcal{E}_{r(G)} = \mathcal{E}_{r(a)} + \mathcal{E}_{r(b)} + \mathcal{E}_{r(c)}$. Cioè l'errore relativo della grandezza G si ottiene sommando gli errori relativi delle grandezze che la definiscono.

RIEPILOGANDO: Nelle operazioni di somma o sottrazione si sommano gli errori relativi mentre nelle operazioni di moltiplicazione e divisione (ed elevamento a potenza) si sommano gli errori relativi.

CIFRE SIGNIFICATIVE NELLE OPERAZIONI

Il numero di cifre significative che occorre riportare come risultato di una operazione seguono le seguenti regole:

- **moltiplicazione e divisione di una *misura* per un *numero***: il risultato deve avere lo stesso numero di cifre significative della misura.

  Esempio: $\frac{20(m)}{5} = 4{,}0\ m \qquad 5{,}87\ s \cdot 4 = 23{,}4\cancel{8}\ s = 23{,}5\ s$

- **moltiplicazione e divisione di misure: il risultato deve avere lo stesso numero di cifre significative della** misura meno precisa.

  Esempio: $5{,}870\ m \cdot 2{,}5\ m = 14{,}\cancel{675}\ m^2 = 15\ m^2$
  $48{,}2\ km : 3{,}7524\ h = 12{,}8\cancel{451125}\ \frac{km}{h} = 12{,}8\ \frac{km}{h}$

- **Addizione e sottrazione di *misure***: prima di effettuare l'operazione tutte le misure devono essere arrotondate con il numero che ha l'incertezza più grande.

  Esempio: $31{,}9\ m + 23\ m + 4{,}7354\ m$ dato che la misura con l'incertezza maggiore è $23\ m$ occorre arrotondare tutte le misura all'unità.

31,9	+		~~31,9~~	32 m +
23	+	→		23 m +
4,7354	+		~~4,7354~~	5 m =
				60 m